

MAI 1 - domácí úkol (ze cvičení) 11.

1. Ukažte (vyberte si aspoň jedno z následujících tvrzení):

a) pro $x \in (0, \infty)$ platí $\ln x \leq x - 1$;

b) $x \in (0, \infty)$ platí $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$

c) $x \in (0, \infty)$ platí $e^{\frac{x}{x+1}} < x+1$;

2*. A chcete-li „zkuste“ („nepovinné“):

Ukažte, že platí:

Je-li $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) < 0$) v intervalu (a, b) , pak pro lib. $x_0 \in (a, b)$ a všechna $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$

je $f(x) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$).

(Odtud se pak snadno ukáže např. platnost nerovností $\ln(x+1) < x$ pro $x > -1$, $x \neq 0$).

3. Sepište (co nejlépe) důkaz tvrzení:

Když $f'(x) = g'(x) \in R$ pro $x \in (a, b)$, pak existuje konstanta $c \in R$ tak, že na intervalu (a, b) je $f(x) = g(x) + c$.

4. Najděte Taylorův polynom

a) $T_n^{f,0}(x)$, je-li $f(x) = \sqrt{1+x}$;

b) $T_2^{f,0}(x)$, je-li $f(x) = \ln(1 + \sin 2x)$.

5. Odhadněte chybu v aproximaci funkce $f(x) = \sin x$ Taylorovým polynomem 3.stupně pro $|x| \leq \frac{1}{2}$ (a srovnajte s kalkulačkou výpočet (např.) $\sin(0,1)$ a $\sin(0,01)$ pomocí tohoto Taylorova polynomu) .

6. Užitím Taylorova polynomu spočítejte aspoň jednu z limit

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \exp(-\frac{x^2}{2})}{x^4}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}))$.

(Nápověda, chcete-li, pro příklad b) : zkuste danou limitu v ∞ užitím VLSF „změnit“ na limitu v bodě 0 .)